

УДК 621.83.062.1

**РОГОВ А.В.**, НТУ «ХПИ»

# **УСОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДИКИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДЛЯ АНАЛИЗА НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЯГОВО-ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ**

Запропонована модифікація методики моделювання опорної поверхні методом триангуляції на основі висоти вузлових точок. Представлена методика дозволяє моделювати опорну поверхню довільної форми для подальшого використання для аналізу динаміки руху тягово-транспортного засобу.

**Анализ последних достижений и публикаций.** В работах [1, 2] представлена методика моделирования опорной поверхности по высотам узловых точек квадратной сетки, накладываемой на моделируемую поверхность. Несмотря на показанную в [1,2] эффективность предложенной методики, она обладает двумя недостатками: невозможность адекватно построить поверхность для случая затяжного спуска или подъема и неопределенность участка поверхности в местах стыка квадратных участков накладываемой сетки, поскольку гладкость и непрерывность функции в местах стыка не была доказана. Данные недостатки могут привести к невозможности исследования движения транспортного средства в частных случаях моделируемой опорной поверхности, а также из-за разрывов первого рода в частных производных на стыках квадратных участков.

**Цель и постановка задачи.** В данной статье представлена усовершенствованная методика моделирования опорной поверхности, позволяющая адекватно описать опорную поверхность в общем случае, а также аналитическое доказательство непрерывности и гладкости функции поверхности в местах стыка треугольных участков сетки. Подобная методика в комплексе с математической моделью системы поддресоривания, движителя, узлов и агрегатов транспортного средства и т.д. позволяет проводить детальный анализ функциональности транспортно-тягового средства при движении по реальной поверхности – как правило, подобный анализ проводился для частных случаев идеально ровной поверхности, что не соответствует действительности и снижает точность полученных результатов.

**Методика моделирования.** В отличие от методики, представленной в работах [1,2], на поверхность, служащую опорной для моделирования динамики транспортного средства, накладывается треугольная сетка со стороной  $\Delta$ . Каждому треугольнику соответствует функция двух аргументов  $F_i(x; y)$ , определяющая высоту точки внутри отдельного треугольника сетки в зависимости от ее координаты (рис. 1).

В каждом отдельном треугольнике сетки в предлагаемой методике функция  $F_i(x; y)$  должна содержать точки треугольника (значение функции в этих точках равно заданным высотам) и обладать частными производными  $\frac{\partial F_i(x; y)}{\partial x}$  и  $\frac{\partial F_i(x; y)}{\partial y}$ , равными в узловых точках одному числу, независимо от того, из какого треугольника рассматривается узловая точка, поскольку одна точка сетки рассматривается отдельно

при построении функций  $F_i(x; y)$  для шести треугольников (на рис. 1 такими точками являются А и В). Данные условия обеспечивают гладкость и непрерывность общей поверхности в узловых точках. Гладкость и непрерывность общей поверхности на линиях стыка треугольников будет доказана ниже. Таким образом, для каждой точки необходимо соблюдение трех условий (высота, производная по  $x$ , производная по  $y$ ), следовательно, функция участка сетки  $F_i(x; y)$  должна удовлетворять одновременно 9 условиям.

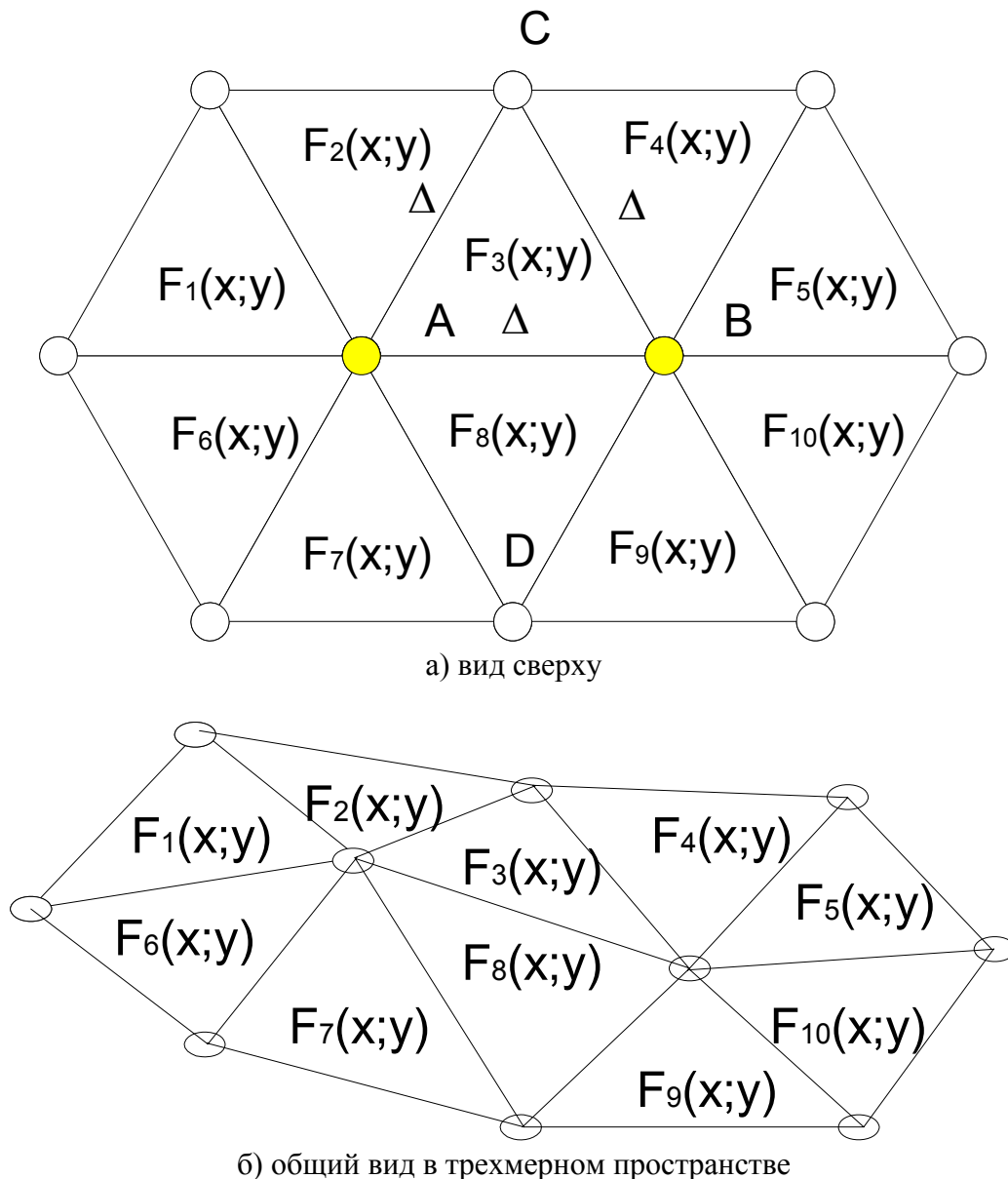


Рисунок 1 – Расчетная схема для построения опорной поверхности

Простейший симметричный вид такой функции выглядит следующим образом:

$$F_i(x; y) = F_0(x; y; \bar{a}) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5x^3 + a_6x^2y + a_7xy^2 + a_8y^3, \quad (1)$$

где  $\bar{a}$  - 9-мерный вектор неизвестных, определяющий вид функции. Данный вектор необходимо определить, подставив координаты узловых точек и приравняв значения функции (1) и ее частных производных заданным величинам.

Величины частных производных определяются в каждой точке вне зависимости от треугольника, в составе которого рассматривается точка:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_i(x; y)}{\partial x} &= \frac{z(x + \Delta; y) - z(x - \Delta; y)}{2\Delta}, \\ \frac{\partial F_i(x; y)}{\partial y} &= \frac{1}{4\Delta} \left[ z\left(x - \frac{1}{2}\Delta; y + \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta\right) + z\left(x + \frac{1}{2}\Delta; y + \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta\right) \right] - \\ &- \frac{1}{4\Delta} \left[ z\left(x - \frac{1}{2}\Delta; y - \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta\right) - z\left(x + \frac{1}{2}\Delta; y - \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta\right) \right],\end{aligned}\quad (2)$$

где  $z(x; y)$  – заданные высоты узловых точек.

С учетом общего вида функции (1) ее частные производные выражаются следующим образом:

$$\frac{\partial F_i(x; y)}{\partial x} = a_1 + 2a_3x + 3a_5x^2 + 2a_6xy + a_7y^2; \quad (3)$$

$$\frac{\partial F_i(x; y)}{\partial y} = a_2 + 2a_4y + a_6x^2 + 2a_7xy + 3a_8y^2. \quad (4)$$

Таким образом, параметры  $a_0 \dots a_9$  для каждой функции (1) определяются из системы уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} a_0 + a_1x_A + a_2y_A + a_3x_A^2 + a_4y_A^2 + a_5x_A^3 + a_6x_A^2y_A + a_7x_Ay_A^2 + a_8y_A^3 &= z_A \\ a_0 + a_1x_B + a_2y_B + a_3x_B^2 + a_4y_B^2 + a_5x_B^3 + a_6x_B^2y_B + a_7x_By_B^2 + a_8y_B^3 &= z_B \\ a_0 + a_1x_C + a_2y_C + a_3x_C^2 + a_4y_C^2 + a_5x_C^3 + a_6x_C^2y_C + a_7x_Cy_C^2 + a_8y_C^3 &= z_C \\ a_1 + 2a_3x_A + 3a_5x_A^2 + 2a_6x_Ay_A + a_7y_A^2 &= p_A \\ a_1 + 2a_3x_B + 3a_5x_B^2 + 2a_6x_By_B + a_7y_B^2 &= p_B \\ a_1 + 2a_3x_C + 3a_5x_C^2 + 2a_6x_Cy_C + a_7y_C^2 &= p_C \\ a_2 + 2a_4y_A + a_6x_A^2 + 2a_7x_Ay_A + 3a_8y_A^2 &= q_A \\ a_2 + 2a_4y_B + a_6x_B^2 + 2a_7x_By_B + 3a_8y_B^2 &= q_B \\ a_2 + 2a_4y_C + a_6x_C^2 + 2a_7x_Cy_C + 3a_8y_C^2 &= q_C \end{aligned} \right. , \quad (5)$$

где  $x_i$ ;  $y_i$ ;  $z_i$  – координаты трех узловых точек;  $p_i$  – требуемое значение частной производной (3), определяемое по выражению (2);  $q_i$  – требуемое значение частной производной (4).

Для доказательства гладкости и непрерывности общей кусочно-заданной функции, определяемой различными функциями (1) в каждом треугольнике, достаточно рассмотреть два треугольника ABC и ABD (рис. 1) и доказать гладкость и непрерывность функции на линии AB – т.е. тождественные равенства:

$$\begin{cases} F_2(x; y_A) \equiv F_8(x; y_A) \\ \frac{\partial F_2(x; y_A)}{\partial y} \equiv \frac{\partial F_8(x; y_A)}{\partial y} \end{cases} \quad (6)$$

Справедливость данного утверждения для остальных сторон треугольника доказывается симметричностью функции (1) и решаемой задачи. Предположим, что на

рис. 1 координаты точки  $A(0;0;z_A)$ , тогда  $B(\Delta;0;z_B)$ ,  $C\left(\frac{1}{2}\Delta; \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta; z_C\right)$ ,

$D\left(\frac{1}{2}\Delta; -\frac{\sqrt{3}}{2}\Delta; z_D\right)$ . Для функции  $F_2(x; y)$  система (5) преобразуется к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = z_A \\ a_0 + a_1\Delta + a_3\Delta^2 + a_5\Delta^3 = z_B \\ a_0 + a_1\frac{1}{2}\Delta + a_2\frac{\sqrt{3}}{2}\Delta + a_3\frac{1}{4}\Delta^2 + a_4\frac{3}{4}\Delta^2 + a_5\frac{1}{8}\Delta^3 + a_6\frac{\sqrt{3}}{8}\Delta^3 + a_7\frac{3}{8}\Delta^3 + a_8\frac{3\sqrt{3}}{8}\Delta^3 = z_C \\ a_1 = p_A \\ a_1 + 2a_3\Delta + 3a_5\Delta^2 = p_B \\ a_1 + a_3\Delta + \frac{3}{4}a_5\Delta^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}a_6\Delta^2 + \frac{3}{4}a_7\Delta^2 = p_C \\ a_2 = q_A \\ a_2 + a_6\Delta^2 = q_B \\ a_2 + a_4\Delta\sqrt{3} + \frac{1}{4}a_6\Delta^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}a_7\Delta^2 + \frac{9}{4}a_8\Delta^2 = q_C \end{array} \right. \quad , (7)$$

а для функции  $F_8(x; y)$  эта система имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = z_A \\ a_0 + a_1\Delta + a_3\Delta^2 + a_5\Delta^3 = z_B \\ a_0 + a_1\frac{1}{2}\Delta - a_2\frac{\sqrt{3}}{2}\Delta + a_3\frac{1}{4}\Delta^2 + a_4\frac{3}{4}\Delta^2 + a_5\frac{1}{8}\Delta^3 - a_6\frac{\sqrt{3}}{8}\Delta^3 + a_7\frac{3}{8}\Delta^3 - a_8\frac{3\sqrt{3}}{8}\Delta^3 = z_D \\ a_1 = p_A \\ a_1 + 2a_3\Delta + 3a_5\Delta^2 = p_B \\ a_1 + a_3\Delta + \frac{3}{4}a_5\Delta^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}a_6\Delta^2 + \frac{3}{4}a_7\Delta^2 = p_D \\ a_2 = q_A \\ a_2 + a_6\Delta^2 = q_B \\ a_2 - a_4\Delta\sqrt{3} + \frac{1}{4}a_6\Delta^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}a_7\Delta^2 + \frac{9}{4}a_8\Delta^2 = q_D \end{array} \right. \quad (8)$$

Поскольку  $u_A = 0$ , то функции из (6) сводятся к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_i(x;0) = a_0 + a_1x + a_3x^2 + a_5x^3 \\ \frac{\partial F_i(x;0)}{\partial y} = a_2 + a_6x^2 \end{array} \right. \quad (9)$$

Тождественное равенство функций из (6) выполняется при условии совпадения шести коэффициентов  $a_0; a_1; a_2; a_3; a_5; a_6$ , присутствующих в (9). Для обеих систем (7,8) видно, что  $a_0 = z_A; a_1 = p_A; a_2 = q_A; a_6 = \frac{q_B - q_A}{\Delta^2}$ . Коэффициенты  $a_3; a_5$  присутствуют в двух идентичных уравнениях систем (7,8) совместно с уже определенными коэффициентами  $a_0; a_1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1\Delta + a_3\Delta^2 + a_5\Delta^3 = z_B \\ a_1 + 2a_3\Delta + 3a_5\Delta^2 = p_B \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\text{откуда } a_5 = \frac{(p_A + p_B)\Delta + 2z_A - 2z_B}{\Delta^3}; a_3 = \frac{3z_B - 3z_A - (2p_A + p_B)\Delta}{\Delta^2}.$$

Таким образом, коэффициенты  $a_0; a_1; a_2; a_3; a_5; a_6$  для обеих систем (7,8) равны, что обеспечивает тождественное равенство функций (6) и, как следствие, непрерывность и гладкость функции при переходе из треугольника ABC к треугольнику ABD (рис. 1) в частном случае рассмотренного отрезка АВ и вообще для всей построенной поверхности в силу симметричности задачи и общего вида функции (1).

**Результаты моделирования.** На рис. 2. представлен пример построения поверхности по четырем узловым точкам ABCD в специализированном математическом пакете MathSoft MathCAD. Из рис. 2 можно сделать вывод, что представленная методика позволяет моделировать гладкую непрерывную поверхность на основании высот узловых точек треугольной сетки – в частности, видно, что функция не имеет разрывов и изломов на отрезке АВ, при этом пространственные треугольники ABC и ABD построены по разным функциям вида (1).

**Выводы.** Представленная методика является более эффективной по сравнению с аналогичной методикой, описанной в [1,2], поскольку позволяет моделировать любую поверхность с большей степенью адекватности. Кроме того, для представленной методики доказана возможность построения гладкой непрерывной функции поверхности, построенной из набора локальных функций, коэффициенты которых вычисляются на основании высот узловых точек треугольной сетки.

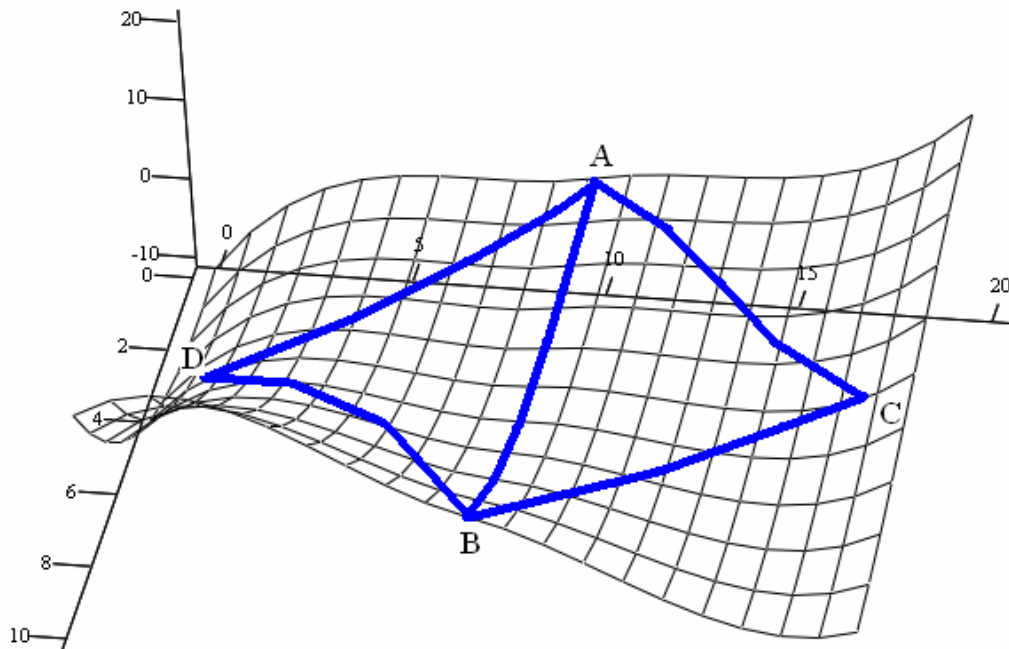


Рисунок 2 – Пример построения поверхности.

**Список литературы:** 1. Самородов В.Б., Рогов А.В. Математическое моделирование динамики движения гусеничного трактора в общем случае неравномерного движения на произвольной поверхности. – Тракторная энергетика в растениеводстве. Сб. науч. тр. – Харьков: ХГТУСХ, 2003. – № 6. – С. 150-162. 2. Рогов А.В. Развитие методов расчета систем «двигатель-трансмиссия» автомобилей и тракторов. – Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Харьков: ХНАДУ. – 2006.